

H-236

B.Sc. (Part-III) Examination, 2019

MATHEMATICS

Paper - I

(Analysis)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

Minimum Pass Marks : 17

नोट : सभी प्रश्न अनिवार्य हैं। प्रत्येक प्रश्न के कोई दो भाग हल
करें। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : All questions are compulsory. Attempt any two
parts from each question. All questions have
equal marks.

इकाई-I / UNIT-I

Q. 1. (a) किन्हीं दो श्रेणियों के लिए मर्टेन्स प्रमेय लिखकर सिद्ध
कीजिए।

(2)

State & prove Merten's theorem for any two series.

(b) लैबनीज प्रमेय लिखकर सिद्ध कीजिए।

State & prove Leibnitz theorem.

(c) आवर्ती फलन $f(x)$ के लिए फूरियर श्रेणी ज्ञात कीजिए

जहाँ

$$f(x) = \begin{cases} -\pi & \text{जब } -\pi < x < 0 \\ x & \text{जब } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Find the Fourier series of periodic function

$f(x)$ where

$$f(x) = \begin{cases} -\pi & \text{when } -\pi < x < 0 \\ x & \text{when } 0 < x < \pi \end{cases}$$

(3)

इकाई-II / UNIT-II

Q. 2. (a) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक दिश्ट फलन रीमन समाकलनीय है।

Prove that every monotonic function is Riemann integrable.

(b) दर्शाइये कि $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ अभिसारी है।

Show that $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ is convergent.

(c) सिद्ध कीजिए कि समाकल $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)\sqrt{b-x}}$ अपसारी है।

Prove that $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)\sqrt{b-x}}$ is divergent.

(4)

इकाई-III / UNIT-III

Q. 3. (a) यदि $u = (x - 1)^3 - 3xy^2 + 3y^2$, v का निर्धारण इस प्रकार कीजिए कि $u + iv$, $x + iy$ का एक नियमित फलन है।

If $u = (x - 1)^3 - 3xy^2 + 3y^2$, then construct the function v such that $u + iv$ is a regular function of $x + iy$.

(b) बिन्दु $z_1 = 2$, $z_2 = i$, $z_3 = -2$ को बिन्दुओं $w_1 = 1$, $w_2 = i$ और $w_3 = -1$ में प्रतिचित्रित करने वाले द्विमिक रूपांतरण को ज्ञात कीजिए।

Find the bilinear transformation that maps the point $z_1 = 2$, $z_2 = i$, $z_3 = -2$ into the point $w_1 = 1$, $w_2 = i$, $w_3 = -1$.

(5)

(c) दिखाइये द्विमिक रूपांतरण के अंतर्गत वज्ञानुपात निश्चर होते हैं।

Show that cross ratio are invariant under bilinear transformation.

इकाई-IV / UNIT-IV

Q. 4. (a) माना एक प्रतिचित्रण $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ निम्न प्रकार परिभाषित है

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

तो सिद्ध कीजिए कि d , \mathbb{R} पर एक दूरीक है।

Let a mapping $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is defined as

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}, \quad x, y \in \mathbb{R} \text{ then prove that } d$$

is metric on \mathbb{R} .

(6)

- (b) सिद्ध कीजिए कि किसी दूरीक समष्टि में प्रत्येक संवृत्त गोलक एक संवृत्त समुच्चय होता है।

Prove that in a metric space, every closed sphere is a closed set.

- (c) सिद्ध कीजिये कि $\sqrt{8}$ एक परिमेय संख्या नहीं है।

Prove that $\sqrt{8}$ is not rational number.

इकाई-V / UNIT-V

- Q. 5. (a) सिद्ध कीजिए कि एक संहत दूरीक समष्टि का बंद उपसमुच्चय संहत होता है।

Prove that a closed subset of a compact metric space is compact.

(7)

- (b) सिद्ध कीजिए कि किसी संबद्ध समुच्चय का सतत प्रतिचित्रण भी संबद्ध होता है।

Prove that the continuous image of a connected set is connected.

- (c) बैयर संवर्ग प्रमेय को लिखिये एवं सिद्ध कीजिए।

State & prove Baire's category theorem.